www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail

SESSION 1989

Mathématiques

Epreuve n° 2 (Problème)

(Options T et TA)

Durée : 3 heures

Les candidats sont invités à donner de leurs affirmations des justifications brèves mais complètes.
Les trois parties du problème sont indépendantes.

On désigne par f la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par: $f(x) = \exp(-x^2)$.

On rappelle que l'on a: $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = \sqrt{\pi}$.

I

1°) Etudier les variations de f .
Construire sa représentation graphique en précisant les points d'inflexion.

2°) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f admet une dérivée n-ième $f^{(n)}$ telle que:

$$(1) \qquad f^{(n)}(x) = f(x)H_n(x)$$

où H_n est une fonction polynôme dont on précisera le degré, la parité et le terme de plus haut degré.
On étend la définition de H_n en posant: $H_0 = 1$ (et $f^{(0)} = f$).

3°) Montrer que la suite (H_n) vérifie la relation de récurrence:

$$(2) \qquad H_{n+1} + 2xH_n + 2nH_{n-1} = 0 \qquad \text{pour} \quad n \geqslant 1 .$$

(On pourra dériver convenablement la relation: $f' = H_1 f$).

II

On définit la fonction F de la variable réelle x par :

$$(3) \qquad F(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{itx}dt .$$

1°) Etudier la convergence des intégrales $I_k = \int_{-\infty}^{+\infty} t^k f(t)dt$, pour $k \in \mathbb{N}$.

2°) Quel est le domaine de définition de F ?
Préciser sa parité.
Montrer que F(x) est un nombre réel.

3°) t et h étant des nombres réels donnés, calculer l'intégrale

$$J(h,t) = \int_0^h (h-u)e^{itu}du .$$

4°) Montrer qu'il existe une constante $K > 0$ telle que:

$$\left| F(x+h) - F(x) - ih\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)e^{itx}dt \right| \leqslant Kh^2 .$$

5°) Etudier la dérivabilité de F et donner une expression de F'(x) sous forme d'intégrale.

6°) Déterminer une équation différentielle du premier ordre vérifiée par F . En déduire une expression de F(x) à l'aide de la fonction f .

Tournez la page S.V.P.

III

On définit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction u_n de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par:

$$u_0(x) = f(x) \quad \text{et} \quad u_n(x) = f(x + 2n\pi) + f(x - 2n\pi) \quad \text{pour } n \geq 1 .$$

Lorsque la série de fonctions $\Sigma\, u_n$ converge, on désigne par S sa somme:

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x) .$$

1°) Soit a un nombre réel > 0 . Montrer que Σu_n est normalement convergente sur $[-a,a]$.
Que peut-on en conclure pour la fonction S ?

2°) S est-elle de classe C^1 sur $\mathbb{R}$?

3°) Comparer $S(x+2\pi)$ et $S(x)$.

4°) Pour tout entier $k \in \mathbb{Z}$, soit c_k le coefficient de e^{ikx} dans la série de Fourier de S écrite sous forme exponentielle. Montrer que:

$$(4) \qquad 2\pi c_k = F(k)$$

(F est définie en II, formule (3)).

5°) Quelle est la somme de la série de Fourier de S ?
Déduire de ce qui précède la formule de Poisson:

$$(5) \qquad 1 + 2\sum_{1}^{+\infty} \exp\left(-\frac{n^2}{4}\right) = 2\sqrt{\pi}\left(1 + 2\sum_{1}^{+\infty} \exp(-4\pi^2 n^2)\right) .$$

Quel intérêt cette formule vous parait-elle présenter ?

0 0

0

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail